

國立中央大學

統計研究所

碩士論文

根據廣義伽瑪加速衰變品質特性

進行失效時間之統計推論

研究生：李函穎

指導教授：陳玉英博士

中華民國一百零三年六月



國立中央大學圖書館

碩博士論文電子檔授權書

(101 年 9 月最新修正版)

本授權書授權本人撰寫之碩/博士學位論文全文電子檔(不包含紙本、詳備註 1 說明)，在「國立中央大學圖書館博碩士論文系統」。(以下請擇一勾選)

同意 (立即開放)

同意 (請於西元 _____年____月____日開放)

不同意，原因是：_____

在國家圖書館「臺灣博碩士論文知識加值系統」

同意 (立即開放)

同意 (請於西元 _____年____月____日開放)

不同意，原因是：_____

以非專屬、無償授權國立中央大學、台灣聯合大學系統圖書館與國家圖書館，基於推動「資源共享、互惠合作」之理念，於回饋社會與學術研究之目的，得不限地域、時間與次數，以紙本、微縮、光碟及其它各種方法將上列論文收錄、重製、與利用，並得將數位化之上列論文與論文電子檔以上載網路方式，提供讀者基於個人非營利性質之線上檢索、閱覽、下載或列印。

研究生簽名：_____李函穎_____ 學號：_____101225007_____

論文名稱：_____根據廣義伽瑪加速衰變品質特性進行失效時間之統計推論_____

指導教授姓名：_____陳玉英 博士_____

系所：_____統計研究_____所 博士班 碩士班

備註：

1. 本授權書之授權範圍僅限電子檔，紙本論文部分依著作權法第 15 條第 3 款之規定，採推定原則即預設同意圖書館得公開上架閱覽，如您有申請專利或投稿等考量，不同意紙本上架陳列，須另行加填聲明書，詳細說明與紙本聲明書請至 <http://thesis.lib.ncu.edu.tw/> 下載。
2. 本授權書請填寫並親筆簽名後，裝訂於各紙本論文封面後之次頁（全文電子檔內之授權書簽名，可用電腦打字代替）。
3. 請加印一份單張之授權書，填寫並親筆簽名後，於辦理離校時交圖書館（以統一代轉寄給國家圖書館）。
4. 讀者基於個人非營利性質之線上檢索、閱覽、下載或列印上列論文，應遵守著作權法規定。

摘要

為研究高可靠度工業產品在正常使用條件下之失效時間，經常將其置於較嚴苛的環境應力中，然後觀察產品品質特性隨時間衰變的過程，稱為加速衰變試驗。加速衰變的品質特性經常是非遞增或非遞減的，所以，品質特性的減量或增量為非負之隨機變數。本文在此一隨機變數為廣義伽瑪分布之假設下，推論在正常使用情形下，有 $100 \times p\%$ 產品失效的時間，稱之為 p 分位失效時間，記作 t_p 。除根據最大概似估計求出 t_p 的信賴下界，也應用貝氏方法求得 t_p 的可信下界。本文以模擬研究上述推論方法之涵蓋機率，結果顯示 t_p 信賴下界的涵蓋機率在小樣本時無法維持其信賴水準；但是， t_p 可信下界之涵蓋機率與信賴水準相近。最後，本文分析一組資料，說明上述推論方法之應用。

關鍵字：加速衰變測試、信賴下界、可信下界、廣義伽瑪分配、 p 分位失效時間

Abstract

In order to study the failure time of industrial product of high reliability under normal situation, we usually observe its quality characteristics (QC) degraded over time under some more severe stress conditions which is called an accelerated degradation test. Because the accelerated degradation QC is often non-increasing or non-decreasing, the QC decrement or increment is a nonnegative random variable. Assume that the random variable is distributed according to a generalized gamma distribution, the p quartile failure time (t_p) is of interest at which $100 \times p\%$ of products reach the threshold value of QC. In addition to obtaining the confidence lower bound of t_p based on its maximum likelihood estimate, we also find the credible lower bound of t_p . A simulation study is conducted to investigate the performance of the proposed lower bounds. The results show that the coverage probability of the confidence lower bound of t_p is not able to maintain its confidence level, while the credible lower bound of t_p holds well its confidence level. Finally, a real data set is illustrated to demonstrate the application of the proposed lower bounds.

Key word: Accelerated degradation test, confidence lower bound, credible lower bound, generalized gamma distribution, p quartile failure time

致謝

謝謝我的家人，

你們無條件的支持，讓我無後顧之憂為我的學業奮鬥！

謝謝指導教授 陳玉英博士，

您不厭其煩的教誨，使我在學習過程中受益良多！

謝謝口試委員 鄒宗山博士及 曾議寬博士，

對於本論文的修改提供了良多建議，使本論文更趨完善！

謝謝吳文瀚同學，

您在我學習過程中，扮演了導師般重要的份量！

謝謝吳威霖同學，

存活是靠您過的，離散是靠您過的，多變量也是靠您過的！

謝謝蕭智宇同學，

您是我讀書的好夥伴，桌球的好戰友，同甘共苦的好兄弟！

謝謝劉允宸同學，

您的英文解讀能力，對我在研究所英文夢魘上解救不少！

謝謝王聖翔同學，

兩年同研究室的好麻吉，您的音樂造詣及學業成就令我望塵莫及！

謝謝張滋顯同學，

您的雙螢幕不論在功課、論文或是觀賞美麗的圖片真的超級好用！

謝謝吳天文同學，

謝謝負責任的天文，一個體育健將是我未來追求的梦想！

謝謝何逸庭同學，

您的ACC季軍戰MVP令我刮目相看，謝謝您延續我的籃球生涯！

謝謝曾耀德同學，

游泳的好哥們，您的熱心助人與辯才無礙讓我由衷佩服！

謝謝吳明駿同學，

您是遊戲王當之無愧，無論何時看到您的遊戲，永遠千變萬化！

謝謝魏郁昇學長，

您的論文及程式對我研究上佔有極大的重要性！

謝謝紀明儀同學，

您的陪伴，您的建言，您的鼓勵，您的關心，點滴在心頭！

謝謝 桌球先生，

桌球是我研究所的全部，謝謝您帶給我每一天無窮的樂趣！

最後謝謝統研所全體教職員、打掃阿姨、同學、學長姐及學弟妹們！

李函穎 謹致於

國立中央大學統計研究所

中華民國一百零三年六月

目錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
致謝	iii
目錄	iv
圖目次	v
表目次	vi
第一章 研究動機及目的	1
第二章 文獻回顧	5
第三章 p 分位失效時間的估計	10
3.1 最大概似估計	11
3.2 貝氏估計	13
第四章 模擬研究	15
4.1 模擬方法	15
4.2 模擬結果	16
第五章 實例分析	18
5.1 廣義伽瑪隨機過程	19
5.2 伽瑪隨機過程	20
第六章 結論	22
參考文獻	23
附錄	25

圖目次

圖一，隨時間衰變的產品品質特性	33
圖二，具形狀參數 λ 及 ω 的廣義伽瑪分布之機率密度函數	34
圖三，不同應力水準下產品品質特性隨時間衰變的過程	35
圖四，不同應力水準下產品品質特性單位時間增量之盒圖	36
圖五，對應不同的 β_0 及 β_1 之 t_p 貝氏估計.....	37

表目次

表一， t_p 最大概似估計式的偏誤、標準差及均方誤差； t_p 信賴下界 與真值之距離及其覆蓋率	25
表二， $\text{Corr}(\beta_0, \beta_1) = 0$ 之下 t_p 貝氏估計式的偏誤、標準差及均 方誤差； t_p 可信下界與真值之距離及其覆蓋率	27
表三， $\text{Corr}(\beta_0, \beta_1) = -0.2$ 之下 t_p 貝氏估計式的偏誤、標準差及均方誤 差； t_p 可信下界與真值之距離及其覆蓋率	29
表四，自動調節加熱電纜資料貝氏分析中使用的先驗分布	31
表五，自動調節加熱電纜資料貝氏分析	32
表六， t_p 最大概似估計、信賴下界($\hat{t}_{0.01,L}$)及 AIC	32

第一章 研究動機及目的

在工業上，研究產品壽命是一個重要的問題。產品在某一段特定時間內，能夠正常運作的機率稱為產品的可靠度 (reliability)。目前在科技進步下，發展出許多高可靠度的產品。因為高可靠度產品在正常情況下不易損壞，如欲研究其壽命，需要較長的時間才能紀錄其損壞的時間資訊，因此，一般會使用加速壽命試驗 (accelerated life test, 簡記 ALT) 或加速衰變試驗 (accelerated degradation test, 簡記 ADT) 解決此類的問題。

加速壽命試驗是指研究者選擇一個或多個可控制的有效環境應力 (environmental stress)，如電壓，濕度，溫度等，將產品置於比正常操作條件較嚴苛的環境應力中，觀察產品壽命的試驗。此研究方法可以在較短時間內觀測到產品壽命的資訊，但是對於較不易損壞的高可靠度產品，此方法的幫助仍是有限的。

加速衰變試驗是指將產品置於較嚴苛的環境應力，然後觀察產品品質特性 (quality characteristic) 隨時間經過衰變的過程。令 y_f 為品質特性反應值的門閾值 (threshold value)。假設品質特性反應值愈高 (低)，代表品質衰退，則當產品品質特性反應值高於 (低於) y_f 時，即判定產品失效。若可以建立衰變品質特性與環境應力水準及時間的統計模式，則可以使用外插法利用模式推知產品在正常環境使用下的失效

時間。一般而言，加速衰變試驗比加速壽命試驗更能夠有效縮短試驗的時間，並且提供較多產品品質的訊息，故本文研究在加速衰變試驗下，如何有效地評估產品維持品質的時間。

令 $Y(t)$ 為產品使用 t 單位時間後的產品品質特性。假設產品品質特性值越高代表產品品質越差，則當品質特性高於門閾值 y_f ，即表示產品失效（圖一上）。令 T 為產品品質特性第一次抵達門閾值的時間，則 p 分位失效時間，記作 t_p ，其中 $0 < p < 1$ ，滿足下列等式：

$$p = P(T < t_p) = P(Y(t_p) > y_f) \quad (1.1)$$

反之當產品品質特性值越低代表產品品質越差（圖一下），則 t_p 滿足下列等式：

$$p = P(T < t_p) = P(Y(t_p) < y_f) \quad (1.2)$$

實務上 p 的值經常設為 0.01 或 0.05。（1.1）或（1.2）皆表示經過 t_p 的使用時間後，會有 $100 \times p\%$ 的產品會失效。此時參數 t_p 提供了產品有效時間的資訊，而如何有效地估計 t_p 正是本文主要探討的問題。

在加速衰變試驗中，因為衰變的品質特性會隨著時間經過而有所變化，一般是使用隨機過程描繪該反應變數的衰變現象。Whitmore 與 Schenkelberg (1997) 應用韋能隨機過程 (Wiener process) 描述衰變的品質特性，但是衰變的品質特性通常具有單調 (Monotone) 的性質，亦即前後品質特性的差異恆為非正或非負，不符合韋能隨機過程所述的

現象：前後品質特性差異為常態分布，可能為正數，也可能為負數的情形。因此，Park 與 Padgett (2005) 建議應用伽瑪隨機過程描述品質特性的衰變過程。魏郁昇 (2013) 分別針對韋能及伽瑪隨機過程描述衰變的品質特性，進一步建議應用貝氏方法 (Bayesian method) 估計 p 分位失效時間的可信下界 (credible lower bound)。

為建立描述品質特性與時間及應力水準的線性模式，Whitmore 與 Schenkelberg (1997) 建議先對時間做指數轉換，並且將應力水準用阿瑞尼斯 (Arrhenius) 轉換，然後根據在不同的應力水準下，受試產品隨時間經過測得的反應值，利用最大概似估計法配適線性模式。Park 與 Padgett (2005) 則假設品質特性的增量服從伽瑪分布，其中的尺度參數為常數，形狀參數則與時間及應力水準有關。雖然 Park 與 Padgett (2005) 推導出第一次抵達品質特性門閾值之時間 T 的分布，但是此一分布十分複雜，故建議利用近似估計方法求得 p 分位失效時間 t_p 。因為伽瑪分布是一個特定的右偏分布，為能在實務中分析加速衰變試驗結果，本文擬在品質特性增量服從廣義伽瑪分布 (generalized gamma distribution) 之情形，探討 t_p 的估計。

實務上產品經常會不斷地推陳出新，新一代的產品通常是改良前一代的產品或增加新的功能，因此，在評估新一代的產品可靠度時，可以利用前一代產品測試的資訊作為新一代產品的先驗資訊或先驗分布 (prior distribution)。本文考慮應用貝氏方法，依據現有測試資料調整上述的先驗分布，獲得新一代產品品質特性的後驗分布 (posterior distribution)，進一步求得 t_p 的貝氏估計，並且求出 t_p 的 $100(1-\alpha)\%$ 可信下界，以提供產品的最短有效使用時間。

本文第二章回顧加速衰變試驗下，衰變的品質特性增量為伽瑪隨機過程時， p 分位失效時間 t_p 的最大概似估計及貝氏估計。第三章在加速衰變試驗下，就品質特性增量服從廣義伽瑪分布之下，求出失效時間 t_p 的最大概似估計式及貝氏估計，並且分別建立 t_p 的信賴下界及可信下界。本文執行一個模擬工作，研究在各種特定隨機過程假設下，其 t_p 估計式的偏誤和標準差，以及 t_p 信賴下界及可信下界與真值的距離及其涵蓋機率。模擬過程及結果展示在第四章。第五章使用一筆加速衰變測試資料說明本文所提模式及方法的應用。

第二章 文獻回顧

伽瑪隨機過程

針對衰變中品質特性的增量為非負的情況，Park 與 Padgett (2005) 利用伽瑪隨機過程描繪此一增量隨時間變化的過程。令 $\{Y(t), t \geq 0\}$ 為產品在經過 t 時間衰變的品質特性，則

1. $Y(0) = 0$ ，
2. $Y(t_2) - Y(t_1)$ 和 $Y(t_3) - Y(t_2)$ 互相獨立， $\forall 0 < t_1 < t_2 < t_3$ ，即 $Y(t)$ 有獨立的增量，
3. $\Delta Y(t) = Y(t + \Delta t) - Y(t)$ 服從形狀參數 (shape parameter) 為 $\mu \Delta t$ ，尺度參數 (scale parameter) 為 η 的伽瑪分布。

此處衰變品質特性的增量服從伽瑪分布，簡記 $\Delta Y \sim \Gamma(\mu \Delta t, \eta)$ 。因此，當產品品質特性的值越高代表產品品質越差時，產品品質特性的 p 分位失效時間 t_p 可由下式求得

$$p = P(T < t_p) = P\{Y(t_p) > y_f\} = \int_{y_f}^{\infty} \frac{y^{\mu t_p - 1} e^{-\frac{y}{\eta}}}{\Gamma(\mu t_p) \eta^{\mu t_p}} dy \quad (2)$$

Nelson (1990) 認為阿瑞尼斯 (Arrhenius) 方程式可以解釋工業產品的衰變趨勢與溫度應力水準的關係。若 s_0 及 s_M 分別為應力水準的最低與最高水準，則此方程式為

$$\varphi(s) = \frac{(1/s_0 - 1/s)}{(1/s_0 - 1/s_M)} \quad (3)$$

事實上，透過此一轉換，可得 $0 < \varphi(s) < 1$ 。令 Y_{ijk} 為第 i 個應力水準下的第 j 個產品，在第 k 個時間點的衰變品質特性，其中 $i=1,2,\dots,I$ ， $j=1,2,\dots,J$ ， $k=1,2,\dots,K$ 。當衰變的品質特性為一個韋能隨機過程，Nelson (1990) 提出的模式如下：

$$Y(t_{ijk}) = y_0 + d(s_i)t_{ijk} + \sigma B(t_{ijk})。$$

其中 $d(s_i) = e^{\beta_0 + \beta_1 \varphi(s_i)}$ ， $B(t_{ijk})$ 是平均數為 0，變異數為 t 的標準布朗運動，簡記為 $B(t_{ijk}) \sim N(0, t)$ 。事實上，品質特性增量 $\Delta y_{ijk} = y_{ijk} - y_{ij(k-1)}$ 服從常態分布，其平均數為 $d(s_i)\Delta t_{ijk}$ ，變異數為 $\sigma^2 \Delta t_{ijk}$ ，簡記為 $\Delta Y_{ijk} \sim N(d(s_i)\Delta t_{ijk}, \sigma^2 \Delta t_{ijk})$ ，其中 $\Delta t_{ijk} = t_{ijk} - t_{ij(k-1)}$ 。

魏郁昇 (2013) 考慮品質特性增量 Δy_{ijk} 服從形狀參數 (shape parameter) 為 $d(s_i)\Delta t_{ijk}$ ，尺度參數 (scale parameter) 為 η 的伽瑪分布，簡記為 $\Delta y_{ijk} \sim \Gamma(e^{\beta_0 + \beta_1 \varphi(s_i)} \Delta t_{ijk}, \eta)$ 。令 $\theta = (\beta_0, \beta_1, \eta)$ ，

其機率密度函數為

$$f(\Delta y_{ijk} | \theta) = \frac{\Delta y_{ijk}^{d(s_i)\Delta t_{ijk}-1} e^{-\frac{\Delta y_{ijk}}{\eta}}}{\eta^{d(s_i)\Delta t_{ijk}} \Gamma(d(s_i)\Delta t_{ijk})}， \Delta y_{ijk} > 0，$$

所以，概似函數 (Likelihood function) 為

$$L(\Delta y_{ijk} | \theta) = \prod_{i=1}^I \prod_{j=1}^J \prod_{k=1}^K \frac{\Delta y_{ijk}^{d(s_i)\Delta t_{ijk}-1} e^{-\frac{\Delta y_{ijk}}{\eta}}}{\eta^{d(s_i)\Delta t_{ijk}} \Gamma(d(s_i)\Delta t_{ijk})}， \Delta y_{ijk} > 0，$$

而自然對數概似函數 (Log likelihood function) 則為

$$\begin{aligned} & \log L(\Delta y_{ijk} | \theta) \\ &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \left\{ (d(s_i) \Delta t_{ijk} - 1) \ln \Delta y_{ijk} - \frac{\Delta y_{ijk}}{\eta} - \ln \eta^{d(s_i) \Delta t_{ijk}} - \ln \Gamma(d(s_i) \Delta t_{ijk}) \right\} . \end{aligned}$$

令 $\frac{\partial}{\partial \theta} \log L(\Delta y_{ijk} | \theta) = 0$ ，則對應的估計方程組為

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \beta_0} \log L(\Delta y_{ijk} | \theta) \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta_0} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \left\{ (d(s_i) \Delta t_{ijk} - 1) \ln \Delta y_{ijk} - \frac{\Delta y_{ijk}}{\eta} - \ln \eta^{d(s_i) \Delta t_{ijk}} - \ln \Gamma(d(s_i) \Delta t_{ijk}) \right\} = 0 , \\ & \frac{\partial}{\partial \beta_1} \log L(\Delta y_{ijk} | \theta) \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta_1} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \left\{ (d(s_i) \Delta t_{ijk} - 1) \ln \Delta y_{ijk} - \frac{\Delta y_{ijk}}{\eta} - \ln \eta^{d(s_i) \Delta t_{ijk}} - \ln \Gamma(d(s_i) \Delta t_{ijk}) \right\} = 0 , \\ & \frac{\partial}{\partial \eta} \log L(\Delta y_{ijk} | \theta) \\ &= \frac{\partial}{\partial \eta} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \left\{ (d(s_i) \Delta t_{ijk} - 1) \ln \Delta y_{ijk} - \frac{\Delta y_{ijk}}{\eta} - \ln \eta^{d(s_i) \Delta t_{ijk}} - \ln \Gamma(d(s_i) \Delta t_{ijk}) \right\} = 0 . \end{aligned}$$

求得估計方程組的解後，再對其參數 β_0 、 β_1 及 η 進行第二次偏微分，可得到海森矩陣 (Hessian matrix)。若海森矩陣行列式值 (determinant) 小於 0，則上述解即為參數的最大概似估計值 (maximum likelihood estimate, 簡記 MLE)。

將上述參數的 MLE 代入公式 (2)，可以估計正常使用應力水準 s_0 之下的 p 分位失效時間，記作 t_p^G 。因為 \hat{t}_p^G 的分布非常複雜且難以求得，而且 \hat{t}_p^G 為非負的參數，魏郁昇 (2013) 使用自助抽樣法 (Bootstrap) 求得 \hat{t}_p^G 的標準差，因此可推得 t_p^G 的 $100(1-\alpha)\%$ 信賴下界，簡記為

$$\hat{t}_{p,L}^G = \hat{t}_p^G - z_\alpha \text{SD}(\hat{t}_p^G),$$

其中 z_α 為標準常態分布的上 α 百分位。

假設利用前一代產品測試結果，得到 $(\beta_0, \beta_1)^t$ 的先驗分布為二維常態分布 (Bivariate Normal Distribution)，簡記為

$$(\beta_0, \beta_1)^t \sim \text{BVN}((\mu_{\beta_0}, \mu_{\beta_1})^t, \Sigma_{2 \times 2}), \text{ 其中 } \Sigma_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \sigma_{\beta_0}^2 & \rho \sigma_{\beta_0} \sigma_{\beta_1} \\ \rho \sigma_{\beta_0} \sigma_{\beta_1} & \sigma_{\beta_1}^2 \end{bmatrix}。$$

有關 η 的先驗分布為形狀參數 α ，尺度參數 β 的伽瑪分布，並且 $(\beta_0, \beta_1)^t$ 與 η 相互獨立。因此， θ 的後驗分布為

$$\pi(\theta | \Delta y) \propto f(\Delta y_{ijk} | \theta) \pi(\theta) \propto \prod_{i=1}^I \prod_{j=1}^J \prod_{k=1}^K \frac{\Delta y_{ijk}^{d(s_i)\Delta t_{ijk}-1} e^{-\frac{\Delta y_{ijk}}{\eta}}}{\eta^{d(s_i)\Delta t_{ijk}} \Gamma(d(s_i)\Delta t_{ijk})} \pi_1(\beta_0, \beta_1) \pi_2(\eta)。$$

由於後驗分布相當複雜，因此在設定的先驗分布及概似函數之下，使用 Winbugs，應用蒙地卡羅-馬可夫演算法(MCMC)或 Gibbs sampling 演算法生成來自後驗分布 $(\beta_{0,(1)}, \beta_{1,(1)}, \lambda_{(1)}, \omega_{(1)})', \dots, (\beta_{0,(N)}, \beta_{1,(N)}, \lambda_{(N)}, \omega_{(N)})$ 的值。將這些參數值代入公式 (2) 求得來自該後驗分布的 $t_{p,(1)} \leq t_{p,(2)} \leq \dots \leq t_{p,(N-1)} \leq t_{p,(N)}$ 。之後將這些從後驗分布得到的 t_p 加總並且取其平均即為貝氏估計，簡記為 $\tilde{t}_p^G = \sum_{i=1}^N t_{p,(i)}/N$ ，進一步也可以得到 100(1- α)% 貝氏可信下界，簡記為 $\tilde{t}_{p,L}^G = \tilde{t}_{p,([N\alpha])}$ ，其中 $[N\alpha]$ 為最小或等於 $N\alpha$ 的最大整數。

第三章 p 分位失效時間的估計

本章考慮在 I 個應力水準下，各有 J 個不同產品施以加速衰變試驗。令 Y_{ijk} 為第 i 個應力水準下的第 j 個產品，在第 k 個時間點的衰變品質特性，其中 $i=1,2,\dots,I$ ， $j=1,2,\dots,J$ ， $k=1,2,\dots,K$ 。本章將針對衰變品質特性的增量服從廣義伽瑪分布，討論其 p 分位失效時間之最大概似估計及貝氏估計。

廣義伽瑪隨機過程

針對衰變中品質特性的增量為非負的情況，利用廣義伽瑪隨機過程描繪此一增量隨時間變化的過程。令 $\{Y(t), t \geq 0\}$ 為產品在經過 t 時間衰變的品質特性，則

1. $Y(0)=0$ ，
2. $Y(t_2)-Y(t_1)$ 和 $Y(t_3)-Y(t_2)$ 互相獨立， $\forall 0 < t_1 < t_2 < t_3$ ，即 $Y(t)$ 有獨立的增量，
3. $\Delta Y(t)=Y(t+\Delta t)-Y(t)$ 服從尺度參數 (scale parameter) 為 $\mu\Delta t$ ，兩個恆正形狀參數 (shape parameter) 為 λ 及 ω (圖二) 的廣義伽瑪分布。

此處衰變品質特性的增量服從廣義伽瑪分布，簡記 $\Delta Y \sim GG(\mu\Delta t, \lambda, \omega)$ 。

因此，當產品品質特性的值越高代表產品品質越差時，產品品質特性的 p 分位失效時間 t_p 可由下式求得

$$p = P(T < t_p) = P\{Y(t_p) > y_f\} = \int_{y_f}^{\infty} \frac{\lambda}{\Gamma(\omega)} (\mu t_p)^{-\lambda\omega} y^{\lambda\omega-1} e^{-\left(\frac{y}{\mu t_p}\right)^\lambda} dy \quad (3)$$

3.1 最大概似估計

考慮品質特性增量 Δy_{ijk} 服從尺度參數 (scale parameter) 為 $d(s_i)\Delta t_{ijk}$ ，兩個恆正形狀參數 (shape parameter) 為 λ 及 ω 的廣義伽瑪分布，簡記為 $\Delta y_{ijk} \sim GG(e^{\beta_0+\beta_1\varphi(s_i)}\Delta t_{ijk}, \lambda, \omega)$ 。令 $\tilde{\theta} = (\beta_0, \beta_1, \lambda, \omega)$ ，

其機率密度函數為

$$f(\Delta y_{ijk} | \tilde{\theta}) = \frac{\lambda}{\Gamma(\omega)} (e^{\beta_0+\beta_1\varphi(s_i)}\Delta t_{ijk})^{-\lambda\omega} \Delta y_{ijk}^{\lambda\omega-1} e^{-\left(\frac{\Delta y_{ijk}}{e^{\beta_0+\beta_1\varphi(s_i)}\Delta t_{ijk}}\right)^\lambda}, \Delta y_{ijk} > 0,$$

所以，概似函數 (Likelihood function) 為

$$L(\Delta y_{ijk} | \tilde{\theta}) = \prod_{i=1}^I \prod_{j=1}^J \prod_{k=1}^K \frac{\lambda}{\Gamma(\omega)} (e^{\beta_0+\beta_1\varphi(s_i)}\Delta t_{ijk})^{-\lambda\omega} \Delta y_{ijk}^{\lambda\omega-1} e^{-\left(\frac{\Delta y_{ijk}}{e^{\beta_0+\beta_1\varphi(s_i)}\Delta t_{ijk}}\right)^\lambda}, \Delta y_{ijk} > 0,$$

而自然對數概似函數 (Log likelihood function) 則為

$$\begin{aligned} & \log L(\Delta y_{ijk} | \tilde{\theta}) \\ &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \ln \frac{\lambda}{\Gamma(\omega)} - \lambda\omega (e^{\beta_0+\beta_1\varphi(s_i)}\Delta t_{ijk}) + (\lambda\omega - 1) \ln \Delta y_{ijk} - \left(\frac{\Delta y_{ijk}}{e^{\beta_0+\beta_1\varphi(s_i)}\Delta t_{ijk}}\right)^\lambda. \end{aligned}$$

令 $\frac{\partial}{\partial \theta} \log L(\Delta y_{ijk} | \theta) = 0$ ，則對應的估計方程組為

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \beta_0} \log L(\Delta y_{ijk} | \theta) \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta_0} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \ln \frac{\lambda}{\Gamma(\omega)} - \lambda \omega (e^{\beta_0 + \beta_1 \varphi(s_i)} \Delta t_{ijk}) + (\lambda \omega - 1) \ln \Delta y_{ijk} - \left(\frac{\Delta y_{ijk}}{e^{\beta_0 + \beta_1 \varphi(s_i)} \Delta t_{ijk}} \right)^\lambda = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial \beta_1} \log L(\Delta y_{ijk} | \theta) \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta_1} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \ln \frac{\lambda}{\Gamma(\omega)} - \lambda \omega (e^{\beta_0 + \beta_1 \varphi(s_i)} \Delta t_{ijk}) + (\lambda \omega - 1) \ln \Delta y_{ijk} - \left(\frac{\Delta y_{ijk}}{e^{\beta_0 + \beta_1 \varphi(s_i)} \Delta t_{ijk}} \right)^\lambda = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial \lambda} \log L(\Delta y_{ijk} | \theta) \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \ln \frac{\lambda}{\Gamma(\omega)} - \lambda \omega (e^{\beta_0 + \beta_1 \varphi(s_i)} \Delta t_{ijk}) + (\lambda \omega - 1) \ln \Delta y_{ijk} - \left(\frac{\Delta y_{ijk}}{e^{\beta_0 + \beta_1 \varphi(s_i)} \Delta t_{ijk}} \right)^\lambda = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial \omega} \log L(\Delta y_{ijk} | \theta) \\ &= \frac{\partial}{\partial \omega} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \ln \frac{\lambda}{\Gamma(\omega)} - \lambda \omega (e^{\beta_0 + \beta_1 \varphi(s_i)} \Delta t_{ijk}) + (\lambda \omega - 1) \ln \Delta y_{ijk} - \left(\frac{\Delta y_{ijk}}{e^{\beta_0 + \beta_1 \varphi(s_i)} \Delta t_{ijk}} \right)^\lambda = 0. \end{aligned}$$

求得估計方程組的解後，再對其參數 β_0 、 β_1 、 λ 及 ω 及進行第二次偏微分，可得到海森矩陣 (Hessian matrix)。若海森矩陣行列式值小於 0，則上述解即為參數的最大概似估計值 (maximum likelihood estimate，簡記 MLE)。

將上述參數的 MLE 代入公式 (3)，可以估計正常使用應力水準 s_0 之下的 p 分位失效時間，記作 t_p^{GG} 。因為 \hat{t}_p^{GG} 的分布非常複雜且難以求得，而且 \hat{t}_p^{GG} 為非負的參數，本文使用自助抽樣法 (Bootstrap) 求得 \hat{t}_p^{GG} 的標準差，因此可推得 t_p^{GG} 的 $100(1-\alpha)\%$ 信賴下界，簡記為

$$\hat{t}_{p,L}^{GG} = \hat{t}_p^{GG} - z_\alpha \text{SD}(\hat{t}_p^{GG}),$$

其中 z_α 為標準常態分布的上 α 百分位。

3.2 貝氏估計

假設利用前一代產品測試結果，得到 $(\beta_0, \beta_1)^t$ 的先驗分布為二維常態分布 (Bivariate Normal Distribution)，簡記為

$$(\beta_0, \beta_1)^t \sim \text{BVN}((\mu_{\beta_0}, \mu_{\beta_1})^t, \Sigma_{2 \times 2}), \text{ 其中 } \Sigma_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \sigma_{\beta_0}^2 & \rho \sigma_{\beta_0} \sigma_{\beta_1} \\ \rho \sigma_{\beta_0} \sigma_{\beta_1} & \sigma_{\beta_1}^2 \end{bmatrix}.$$

有關 λ 的先驗分布為比率參數 (rate parameter) ξ 的指數分布 (Exponential Distribution)， ω 的先驗分布為形狀參數 α ，尺度參數 β 的伽瑪分布。並且 $(\beta_0, \beta_1)^t$ 、 ξ 與 ω 相互獨立。因此， θ 的後驗分布為

$$\pi(\theta | \Delta y) \propto f(\Delta y_{ijk} | \theta) \pi(\theta)$$

$$\propto \prod_{i=1}^I \prod_{j=1}^J \prod_{k=1}^K \frac{\lambda}{\Gamma(\omega)} \left(e^{\beta_0 + \beta_1 \varphi(s_i)} \Delta t_{ijk} \right)^{-\lambda \omega} \Delta y_{ijk}^{\lambda \omega - 1} e^{-\left(\frac{\Delta y_{ijk}}{e^{\beta_0 + \beta_1 \varphi(s_i)} \Delta t_{ijk}} \right)^\lambda} \pi_1(\beta_0, \beta_1) \pi_2(\lambda) \pi_3(\omega).$$

由於後驗分布相當複雜，因此在設定的先驗分布及概似函數之下，使用 Winbugs，應用蒙地卡羅-馬可夫演算法(MCMC)或 Gibbs sampling 演算法生成來自後驗分布 $(\beta_{0,(1)}, \beta_{1,(1)}, \lambda_{(1)}, \omega_{(1)}), \dots, (\beta_{0,(N)}, \beta_{1,(N)}, \lambda_{(N)}, \omega_{(N)})$ 的值。將這些參數值代入公式 (3) 求得來自該後驗分布的 $t_{p,(1)} \leq t_{p,(2)} \leq \dots \leq t_{p,(N-1)} \leq t_{p,(N)}$ 。之後將這些從後驗分布得到的 t_p 加總並且取其平均即為貝氏估計，簡記為 $\tilde{t}_p^{GG} = \sum_{i=1}^N t_{p,(i)} / N$ ，進一步也可以得到 $100(1-\alpha)\%$ 貝氏可信下界，簡記為 $\tilde{t}_{p,L}^{GG} = \tilde{t}_{p,([N\alpha])}$ ，其中 $[N\alpha]$ 為最小或等於 $N\alpha$ 的最大整數。

第四章 模擬研究

4.1 模擬方法

本章利用模擬研究探討在不同隨機過程假設下， p 分位失效時間的估計偏誤 (Bias) 與均方誤差 (MSE)，亦探討對應的信賴下界與可信下界的覆蓋機率。由於廣義伽瑪分布包含伽瑪分布 ($\lambda=1$) 及韋伯分布 ($\omega=1$) 等分布，故本文分別在 $\Delta y_{ijk} \sim GG(e^{\beta_0+\beta_1\varphi(s_i)}\Delta t_{ijk}, \lambda=1, \omega)$ 、 $\Delta y_{ijk} \sim GG(e^{\beta_0+\beta_1\varphi(s_i)}\Delta t_{ijk}, \lambda, \omega=1)$ 及 $\Delta y_{ijk} \sim GG(e^{\beta_0+\beta_1\varphi(s_i)}\Delta t_{ijk}, \lambda, \omega)$ 之下生成資料 (表一至表三)，並針對廣義伽瑪及伽瑪隨機過程，將上述 MLE 當成先驗分布的平均數 (Prior mean)，其變異數為 MLE 變異數放大 10 倍。本研究中亦考慮樣本數為 5 或 10 情況，觀察對最大概似估計及貝氏估計所造成的影響。另外，考慮先驗分布中 (β_0, β_1) 的相關係數為 0 或 -0.2 (表二及表三)。

本模擬研究重複次數為 500 次，估計 0.01 分位失效時間 ($t_{0.01}$)，並且根據最大概似估計求出 t_p 的 95% 信賴下界，也應用貝氏方法求得 t_p 的可信下界。其模擬得到的偏誤、標準差、均方誤差、距離及覆蓋率都會展示於 4.2 節，其中最大概似估計法及貝氏方法的偏誤分別為 $E[\hat{t}_{0.01} - t_{0.01}]$ 及 $E[\tilde{t}_{0.01} - t_{0.01}]$ 、標準差分別為 $Sd(\hat{t}_{0.01})$ 及 $Sd(\tilde{t}_{0.01})$ 、均方誤差分別為 $E[\hat{t}_{0.01} - t_{0.01}]^2$ 及 $E[\tilde{t}_{0.01} - t_{0.01}]^2$ 、 t_p 與信賴下界及可信下界之距離分別為 $E[t_{0.01} - \hat{t}_{0.01,L}]$ 及 $E[t_{0.01} - \tilde{t}_{0.01,L}]$ 、和信賴下界及可信下界

的覆蓋率分別為 $P(\hat{t}_{0.01,L} < t_{0.01})$ 及 $P(\tilde{t}_{0.01,L} < t_{0.01})$ 。

4.2 模擬結果

在樣本數為 5 時，使用最大概似估計求得 t_p 的信賴下界如表一 (a) 所示，在廣義伽瑪分布之假設下的覆蓋率有不足的情形，而在伽瑪分布之假設下覆蓋率不是低估就是高估的情形。但是使用貝氏方法求得 t_p 的可信下界如表二 (a) 及表三 (a) 所示，在廣義伽瑪分布之假設下較能夠維持 95% 覆蓋率情形，而在伽瑪分布之假設下覆蓋率依舊不是低估就是高估的情形，且使用貝氏方法較能改善 t_p 的偏誤、標準差及均方誤差。

在樣本數為 10 時，使用最大概似估計求得 t_p 的信賴下界如表一 (b) 所示，在廣義伽瑪分布之假設下的覆蓋率依舊有不足的情形，而在伽瑪分布之假設下覆蓋率依舊不是低估就是高估的情形。但是使用貝氏方法求得 t_p 的可信下界如表二 (b) 及表三 (b) 所示，在廣義伽瑪分布之假設下較能夠維持 95% 覆蓋率情形，而在伽瑪分布之假設下覆蓋率依舊不是低估就是高估的情形，且使用貝氏方法較能改善 t_p 的偏誤、標準差及均方誤差。

結果顯示在廣義伽瑪分布之假設下 t_p 信賴下界的涵蓋機率在小樣本時無法維持其信賴水準；但是， t_p 可信下界之涵蓋機率與信賴水準相近。但不論在最大概似估計及貝氏估計下，在廣義伽瑪分布之假設所求得的 t_p 估計皆比伽瑪分布之假設下合理，並且隨著樣本數提升，也確實能夠有效改善偏誤、標準差及均方誤差。

第五章 實例分析

本文使用一筆加速衰變的測試資料 (Whitmore 與 Schenkelberg, 1997) 說明第三章所提及最大概似估計及貝氏估計的應用。此一加速衰變測試研究的是自動調節加熱電纜 (Self-regular heating cable) 的 p 分位失效時間 t_p 。隨著使用時間增加，電纜表面會逐漸氧化，使得電纜的電阻上升，就電功率公式 ($P = IV = V^2/R$) 而言，在電壓 (V) 不變之下，若電阻 (R) 上升，會導致電流 (I) 下降，進而造成電纜無法加熱至應有的溫度水準，即可判定產品失效。

上述資料有三個不同的溫度應力，在每一個應力下有五個物件進行加速衰變測試，並且每一個物件都在相同的時間點量測，但是不同應力下量測的時間點會有所不同。另外，在溫度為 240 度 (攝氏) 下，第五個物件最後一個量測的時間點出現了一個遺失值 (Missing value)，該篇作者解釋這個遺失值是在測試中，因為固定裝置脫落，所以無法量測到該產品的品質特性，為了方便計算，使用其他四個物件的平均數加以補值。不同應力水準下產品品質特性隨時間衰變的過程如圖三所示。本文亦使用盒鬚圖 (Boxplot) 觀察不同應力水準下，產品品質特性單位時間增量 (即將產品品質特性的增量與時間增量相除)，如圖四所示。

5.1 廣義伽瑪隨機過程

假設衰變品質特性的增量服從廣義伽瑪分布。利用本文第三章介紹使用最大概似估計法和貝氏方法，分別求出該產品 $t_{0.01}$ 的點估計和信賴下界及可信下界。藉由最大概似估計法求得 $\hat{\theta}=(\beta_0, \beta_1, \lambda, \omega)$ 的最大概似估計值為 $(-13.301, 4.211, 0.266, 11.959)$ ，對應的 p 分位失效時間之 MLE 為 $\hat{t}_{0.01}^{GG}=11.943$ ，藉由自助抽樣法估計 $\hat{t}_{0.01}^{GG}$ 的標準差為 0.275，因此可得 $t_{0.01}$ 的 95% 信賴下界為 11.490，亦即有 95% 的信心可以保證該產品在正常使用 11.490（千小時），約略 1.3 年，會有 1% 的產品將無法達到應有的輸出水準。

由於從資料中的變異數共變數矩陣 (Variance-Covariance matrix) 顯示 $\hat{\beta}_0$ 、 $\hat{\beta}_1$ 兩者之間的相關係數為 -0.2，在此一資料分析中，考慮 $(\beta_0, \beta_1)^t$ 先驗分布的相關係數為 0 或 -0.2。本章亦利用 DIC (Deviance information criterion) 評斷先驗分布的變異數放大十倍對模型的優劣。假設先驗分布分別為 $(\beta_0, \beta_1)^t \sim BVN((\mu_{\beta_0}, \mu_{\beta_1})^t, \Sigma_{2 \times 2})$ 、 $\lambda \sim \text{Exp}(\xi)$ 以及 $\omega \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ ，本章將針對表四 (a) 的四種方案中，分別探討貝氏估計 $\tilde{t}_{0.01}^{GG}$ 及其可信下界 $\tilde{t}_{0.01,L}^{GG}$ ，最後利用 DIC 作為模型選擇的依據。

由表五 (a) 的分析結果得知，當 $\text{Corr}(\beta_0, \beta_1) = -0.2$ 時，其 DIC 與 $\text{Corr}(\beta_0, \beta_1) = 0$ 的情形相仿，並且因為多一個參數反而增加了計算上的麻煩。此外當先驗分布的變異數為 MLE 估計時，貝氏估計的 $\tilde{t}_{0.01}^{\text{GG}}$ 皆小於 $\hat{t}_{0.01} = 11.943$ ，因此貝氏方法在此條件下對應產品的保證使用時間傾向保守，但是，還是可能是 MLE 所低估的變異數使然。當先驗分布的變異數為 MLE 放大十倍的估計時，貝氏估計的 $\tilde{t}_{0.01}^{\text{GG}}$ 結果皆大於 $\hat{t}_{0.01} = 11.943$ ，因此，貝氏方法在此條件下對應產品的保證使用時間傾向樂觀。在圖五 (a) 所示，左圖為 $\text{Corr}(\beta_0, \beta_1) = 0$ 及右圖為 $\text{Corr}(\beta_0, \beta_1) = -0.2$ 皆可得知，當先驗分布的平均數不在原來估計值附近時，對 $\tilde{t}_{0.01}^{\text{GG}}$ 估計所產生的影響，亦可得知當 $\text{Corr}(\beta_0, \beta_1) = 0$ 情況下， β_0 及 β_1 符合假設無交互作用。

5.2 伽瑪隨機過程

假設衰變品質特性的增量服從伽瑪分布。利用本文第二章介紹使用最大概似估計法和貝氏方法，分別求出該產品 $t_{0.01}$ 的點估計和信賴下界及可信下界。藉由最大概似估計法求得 $\tilde{\theta} = (\beta_0, \beta_1, \eta)$ 的最大概似估計值為 $(-1.178, 3.142, 5.435)$ ，對應的 p 分位失效時間之 MLE 為 $\hat{t}_{0.01}^{\text{G}} = 14.696$ ，藉由自助抽樣法估計 $\hat{t}_{0.01}^{\text{G}}$ 的標準差為 0.173，因此可得 $t_{0.01}$ 的 95% 信賴下界為 14.411，亦即有 95% 的信心可以保證該產品在正常使用 14.411 (千小時)，約略 1.6 年，會有 1% 的產品將無

法達到應有的輸出水準。

由於從資料中的變異數共變數矩陣 (Variance-Covariance matrix) 顯示 $\hat{\beta}_0$ 及 $\hat{\beta}_1$ 兩者之間的相關係數為 -0.2 ，在此一資料分析中，考慮 $(\beta_0, \beta_1)^t$ 先驗分布的相關係數為 0 或 -0.2 。本章亦利用 DIC (Deviance information criterion) 評斷先驗分布的變異數放大十倍對模型的優劣。假設先驗分布分別為 $(\beta_0, \beta_1)^t \sim \text{BVN}((\mu_{\beta_0}, \mu_{\beta_1})^t, \Sigma_{2 \times 2})$ 及 $\eta \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ ，本章將針對表四(b)的四種方案中，分別探討貝氏估計 $\tilde{t}_{0.01}^G$ 及其可信下界 $\tilde{t}_{0.01,L}^G$ ，最後利用 DIC 作為模型選擇的依據。

由表五(b)的分析結果得知，當 $\text{Corr}(\beta_0, \beta_1) = -0.2$ 時，其 DIC 與 $\text{Corr}(\beta_0, \beta_1) = 0$ 的情形相仿，並且因為多一個參數反而增加了計算上的麻煩。此外貝氏估計的 $\tilde{t}_{0.01}^G$ 皆大於 $\hat{t}_{0.01} = 14.411$ ，因此，貝氏方法之下對應產品的保證使用時間傾向樂觀。在圖五(b)所示，左圖為 $\text{Corr}(\beta_0, \beta_1) = 0$ 及右圖為 $\text{Corr}(\beta_0, \beta_1) = -0.2$ 皆可得知，當先驗分布的平均數不在原來估計值附近時，對 $\tilde{t}_{0.01}^G$ 估計所產生的影響，亦可得知當 $\text{Corr}(\beta_0, \beta_1) = 0$ 情況下， β_0 及 β_1 不符合假設，彼此有交互作用。

本文使用 DIC 評估模型的優劣，由表五顯示在廣義伽瑪分布之假設下，DIC 表現明顯優於伽瑪之假設下。若使用 AIC (Akaike information criterion) 評估模型的優劣，由表六亦顯示在廣義伽瑪分布之假設下，AIC 表現明顯優於伽瑪之假設下。

第六章 結論

本文在此一隨機變數為廣義伽瑪分布之假設下，推論在正常使用情形下，有 $100 \times p\%$ 產品失效的時間，稱之為 p 分位失效時間，記作 t_p 。除根據最大概似估計求出 t_p 的信賴下界，也應用貝氏方法求得 t_p 的可信下界，藉此提供產品的保固期。

現行資訊有限之下，小樣本，最大概似估計不可行，況且在廣義伽瑪分布之下，各種參數的估計並不穩定。反之，貝氏方法就合理模式參數的先驗分布，根據資料加以調整，得到 t_p 的後驗分布。因此，本文建議在小樣本及具有可行分布之下，採用貝氏分析的方法求得 t_p 的可信下界。

參考文獻

- Chhikara R. S. and Folks J. L. (1989). The Inverse Gaussian Distribution: Theory, Methodology and Applications. Marcel Dekker, New York.
- Lim H. and Yum B. J. (2011). Optimal design of accelerated degradation tests based on Wiener process models. *Journal of Applied Statistics*, **38(2)**, 309–325.
- Nelson W. (1990). Accelerated Testing: Statistical Models, Test Plans, and Data analysis. John Wiley and Sons, New York.
- Park C. and Padgett W. J. (2005). Accelerated degradation models for failure based on geometric Brownian motion and gamma processes. *Lifetime Data Analysis*, **11**, 511–527.
- Stacy E. W. and Mihram G. A. (1965). Parameter Estimation for a Generalized Gamma Distribution. *Technometrics*, **7(3)**, 349–358.
- Sturtz S., Ligges U. and Gelman A. (2005). R2WinBUGS: A Package for Running WinBUGS from R. *Journal of Statistical Software*, **12(3)**.

Whitmore G. A. and Schenkelberg F. (1997). Modeling accelerated degradation data using Wiener diffusion with a scale transformation. *Lifetime Data Analysis*, **3**, 27-45.

魏郁昇，「加速衰變測試下 p 分位失效時間之貝氏估計」，國立中央大學，碩士論文，民國 102 年。

附錄

表一， t_p 最大概似估計式的偏誤、標準差及均方誤差； t_p 信賴下界

與真值之距離及其覆蓋率

(a) 樣本數 = 5

β_0	β_1	λ	ω	$t_{0.01}$	Model	Bias	Sd	MSE	D	CP		
		1	0.387	5	GG	0.608	2.190	5.155	3.462	0.968		
					G	-0.703	1.827	3.824	3.692	0.982		
		-2	3	5.172	1	11	GG	0.123	0.563	0.331	0.679	0.878
							G	1.022	0.879	1.816	0.289	0.654
		10	10.271	11	GG	0.039	0.087	0.009	0.088	0.830		
					G	0.310	0.106	0.107	-0.152	0.092		
		-3	4	4.231	1	28	GG	0.122	0.552	0.319	0.683	0.918
							G	-1.883	0.490	3.786	2.623	1.000
		4	14.510	18	GG	0.393	1.756	3.233	2.113	0.882		
					G	2.030	2.989	13.038	2.344	0.800		
		-4	5	1.955	1	50	GG	0.107	0.306	0.105	0.342	0.870
							G	0.814	0.419	0.839	-0.185	0.330
		1	3.926	11	GG	0.331	1.527	2.436	1.904	0.918		
					G	-5.687	1.313	34.058	7.692	1.000		
		-4	5	1.955	1	50	GG	1.780	6.955	51.443	8.278	0.900
							G	-13.147	8.121	238.645	24.908	0.994
		3	16.904	36	GG	0.269	0.758	0.647	0.845	0.870		
					G	1.492	1.296	3.900	0.438	0.626		

表一續

(b) 樣本數 = 10

β_0	β_1	λ	ω	$t_{0.01}$	Model	Bias	Sd	MSE	D	CP
-2	3	1	0.387	5	GG	0.247	1.469	2.216	2.223	0.970
					G	-0.809	1.300	2.341	2.903	0.994
		5.172	1	11	GG	0.051	0.371	0.140	0.541	0.928
					G	0.988	0.636	1.380	-0.001	0.506
		10	10.271	11	GG	0.032	0.060	0.005	0.065	0.840
					G	0.313	0.076	0.103	-0.191	0.006
-3	4	1	3.999	4	GG	0.071	0.376	0.146	0.515	0.932
					G	-1.955	0.354	3.948	2.504	1.000
		4.231	1	28	GG	0.162	1.154	1.355	1.682	0.928
					G	1.896	2.127	8.109	1.399	0.760
		4	14.510	18	GG	0.084	0.212	0.052	0.257	0.882
					G	0.830	0.312	0.785	-0.344	0.144
-4	5	1	3.926	11	GG	0.190	1.045	1.125	1.434	0.926
					G	-5.849	0.951	35.117	7.320	1.000
		1.955	1	50	GG	0.736	4.494	20.695	6.524	0.938
					G	-13.748	5.794	222.508	22.430	1.000
		3	16.904	36	GG	0.210	0.523	0.317	0.635	0.894
					G	1.520	0.938	3.189	-0.042	0.484

表二, $\text{Corr}(\beta_0, \beta_1) = 0$ 之下 t_p 貝氏估計式的偏誤、標準差及均方誤差;

t_p 可信下界與真值之距離及其覆蓋率

(a) 樣本數 = 5

β_0	β_1	λ	ω	$t_{0.01}$	Model	Bias	Sd	MSE	D	CP
-2	3	1	0.387	5	GG	0.588	2.116	4.814	2.299	0.964
					G	-0.573	1.872	3.825	2.658	0.980
		5.172	1	11	GG	0.025	0.543	0.294	0.856	0.948
					G	1.011	0.878	1.792	0.300	0.650
		10	10.271	11	GG	-0.587	0.306	0.438	0.830	0.996
					G	0.308	0.106	0.106	-0.134	0.108
-3	4	1	3.999	4	GG	0.106	0.522	0.283	0.695	0.932
					G	-1.889	0.488	3.804	2.499	1.000
		4.231	1	28	GG	0.103	1.690	2.861	2.614	0.946
					G	2.016	2.983	12.947	2.453	0.838
		4	14.510	18	GG	-0.003	0.292	0.085	0.496	0.958
					G	0.798	0.419	0.812	-0.132	0.380
-4	5	1	3.926	11	GG	0.297	1.464	2.226	1.909	0.928
					G	-5.692	1.308	34.112	7.314	1.000
		1.955	1	50	GG	0.892	6.652	44.960	9.511	0.950
					G	-12.986	8.178	235.391	23.485	0.994
		3	16.904	36	GG	0.111	0.732	0.547	1.093	0.936
					G	1.442	1.288	3.736	0.437	0.640

表二續

(b) 樣本數 = 10

β_0	β_1	λ	ω	$t_{0.01}$	Model	Bias	Sd	MSE	D	CP
-2	3	1	0.387	5	GG	0.276	1.461	2.207	1.775	0.952
					G	-0.732	1.322	2.279	2.262	0.982
		5.172	1	11	GG	0.000	0.364	0.132	0.625	0.962
					G	0.980	0.636	1.364	-0.018	0.486
		10	10.271	11	GG	-0.212	0.072	0.050	0.341	0.998
					G	0.314	0.076	0.104	-0.192	0.006
-3	4	1	3.999	4	GG	0.070	0.370	0.141	0.510	0.944
					G	-1.955	0.353	3.947	2.407	1.000
		4.231	1	28	GG	0.009	1.139	1.294	1.926	0.962
					G	1.862	2.123	7.961	1.380	0.774
		4	14.510	18	GG	0.030	0.206	0.043	0.320	0.942
					G	0.826	0.312	0.780	-0.336	0.138
-4	5	1	3.926	11	GG	0.188	1.024	1.082	1.417	0.944
					G	-5.842	0.955	35.036	7.058	1.000
		1.955	1	50	GG	0.279	4.404	19.435	7.112	0.958
					G	-13.582	5.822	218.294	21.459	1.000
		3	16.904	36	GG	0.138	0.515	0.283	0.725	0.926
					G	1.486	0.937	3.084	-0.105	0.454

表三， $\text{Corr}(\beta_0, \beta_1) = -0.2$ 之下 t_p 貝氏估計式的偏誤、標準差及均方誤

差； t_p 可信下界與真值之距離及其覆蓋率

(a) 樣本數 = 5

β_0	β_1	λ	ω	$t_{0.01}$	Model	Bias	Sd	MSE	D	CP
-2	3	1	0.387	5	GG	0.599	2.125	4.868	2.308	0.964
					G	-0.568	1.873	3.822	2.661	0.980
		5.172	1	11	GG	0.029	0.543	0.295	0.847	0.946
					G	1.016	0.878	1.801	0.296	0.642
10	10.271	11	GG	-0.546	0.296	0.386	0.787	0.996		
			G	0.308	0.106	0.106	-0.134	0.110		
-3	4	1	3.999	4	GG	0.105	0.528	0.290	0.692	0.934
					G	-1.887	0.488	3.798	2.498	1.000
		4.231	1	28	GG	0.118	1.690	2.865	2.589	0.948
					G	2.027	2.983	12.990	2.460	0.838
		4	14.510	18	GG	0.006	0.292	0.085	0.486	0.958
					G	0.797	0.419	0.811	-0.129	0.378
-4	5	1	3.926	11	GG	0.290	1.458	2.206	1.912	0.928
					G	-5.690	1.310	34.086	7.319	1.000
		1.955	1	50	GG	0.866	6.631	44.633	9.533	0.950
					G	-12.976	8.158	234.805	23.571	0.994
		3	16.904	36	GG	0.121	0.733	0.551	1.079	0.936
					G	1.442	1.287	3.732	0.449	0.652

表三續

(b) 樣本數 = 10

β_0	β_1	λ	ω	$t_{0.01}$	Model	Bias	Sd	MSE	D	CP
-2	3	1	0.387	5	GG	0.284	1.466	2.225	1.773	0.952
					G	-0.730	1.322	2.277	2.261	0.982
		5.172	1	11	GG	0.000	0.364	0.132	0.625	0.964
					G	0.981	0.637	1.367	-0.018	0.498
		10	10.271	11	GG	-0.197	0.070	0.044	0.326	0.998
					G	0.314	0.076	0.104	-0.192	0.006
-3	4	1	3.999	4	GG	0.071	0.368	0.140	0.507	0.932
					G	-1.955	0.353	3.945	2.408	1.000
		4.231	1	28	GG	0.016	1.135	1.285	1.917	0.964
					G	1.865	2.125	7.983	1.386	0.778
		4	14.510	18	GG	0.033	0.206	0.044	0.316	0.940
					G	0.827	0.312	0.780	-0.335	0.136
-4	5	1	3.926	11	GG	0.185	1.021	1.075	1.418	0.938
					G	-5.840	0.954	35.010	7.060	1.000
		1.955	1	50	GG	0.276	4.381	19.228	7.105	0.964
					G	-13.569	5.832	218.065	21.483	1.000
		3	16.904	36	GG	0.140	0.515	0.284	0.719	0.930
					G	1.486	0.939	3.088	-0.101	0.448

表四，自動調節加熱電纜資料貝氏分析中使用的先驗分布

(a) 廣義伽瑪隨機過程

Case	Prior distribution
I	$(\beta_0, \beta_1)^t \sim \text{BVN}((-13.301, 4.211)^t, \begin{bmatrix} 6.328 & 0 \\ 0 & 0.114 \end{bmatrix})$ $\lambda \sim \text{Exp}(183.871)$, $\omega \sim \Gamma(10.374, 1.153)$
II	$(\beta_0, \beta_1)^t \sim \text{BVN}((-13.301, 4.211)^t, \begin{bmatrix} 6.328 & -0.170 \\ -0.170 & 0.114 \end{bmatrix})$ $\lambda \sim \text{Exp}(183.871)$, $\omega \sim \Gamma(10.374, 1.153)$
III	$(\beta_0, \beta_1)^t \sim \text{BVN}((-13.301, 4.211)^t, \begin{bmatrix} 63.282 & 0 \\ 0 & 1.140 \end{bmatrix})$ $\lambda \sim \text{Exp}(18.387)$, $\omega \sim \Gamma(1.037, 11.528)$
IV	$(\beta_0, \beta_1)^t \sim \text{BVN}((-13.301, 4.211)^t, \begin{bmatrix} 63.282 & -1.699 \\ -1.699 & 1.140 \end{bmatrix})$ $\lambda \sim \text{Exp}(18.387)$, $\omega \sim \Gamma(1.037, 11.528)$

(b) 伽瑪隨機過程

Case	Prior distribution
I	$(\beta_0, \beta_1)^t \sim \text{BVN}((-1.178, 3.142)^t, \begin{bmatrix} 0.047 & 0 \\ 0 & 0.085 \end{bmatrix})$ $\eta \sim \Gamma(54.840, 0.099)$
II	$(\beta_0, \beta_1)^t \sim \text{BVN}((-13.301, 4.211)^t, \begin{bmatrix} 6.328 & -0.170 \\ -0.170 & 0.114 \end{bmatrix})$ $\eta \sim \Gamma(54.840, 0.099)$
III	$(\beta_0, \beta_1)^t \sim \text{BVN}((-13.301, 4.211)^t, \begin{bmatrix} 63.282 & 0 \\ 0 & 1.140 \end{bmatrix})$ $\eta \sim \Gamma(5.484, 0.991)$
IV	$(\beta_0, \beta_1)^t \sim \text{BVN}((-13.301, 4.211)^t, \begin{bmatrix} 63.282 & -1.699 \\ -1.699 & 1.140 \end{bmatrix})$ $\eta \sim \Gamma(5.484, 0.991)$

表五，自動調節加熱電纜資料貝氏分析

(a) 廣義伽瑪隨機過程

Case	$\tilde{t}_{0.01}^{GG}$	$\tilde{t}_{0.01,L}^{GG}$	DIC
I	10.813	7.026	-303.434
II	11.386	7.483	-303.613
III	13.706	8.656	-309.693
IV	14.204	9.002	-313.473

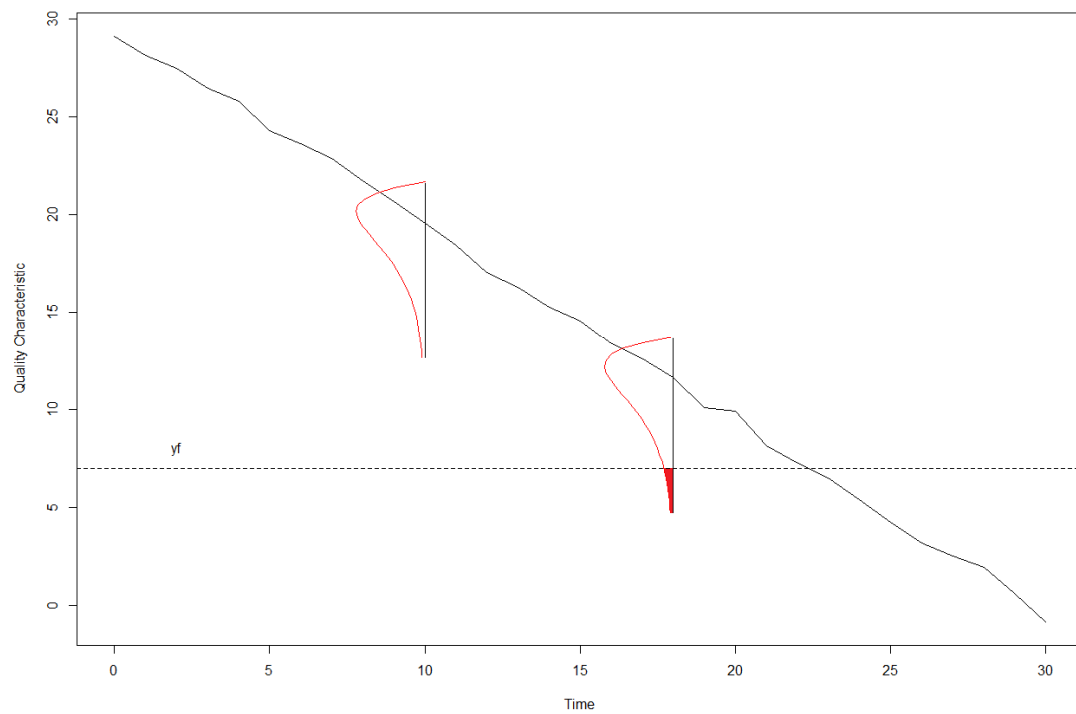
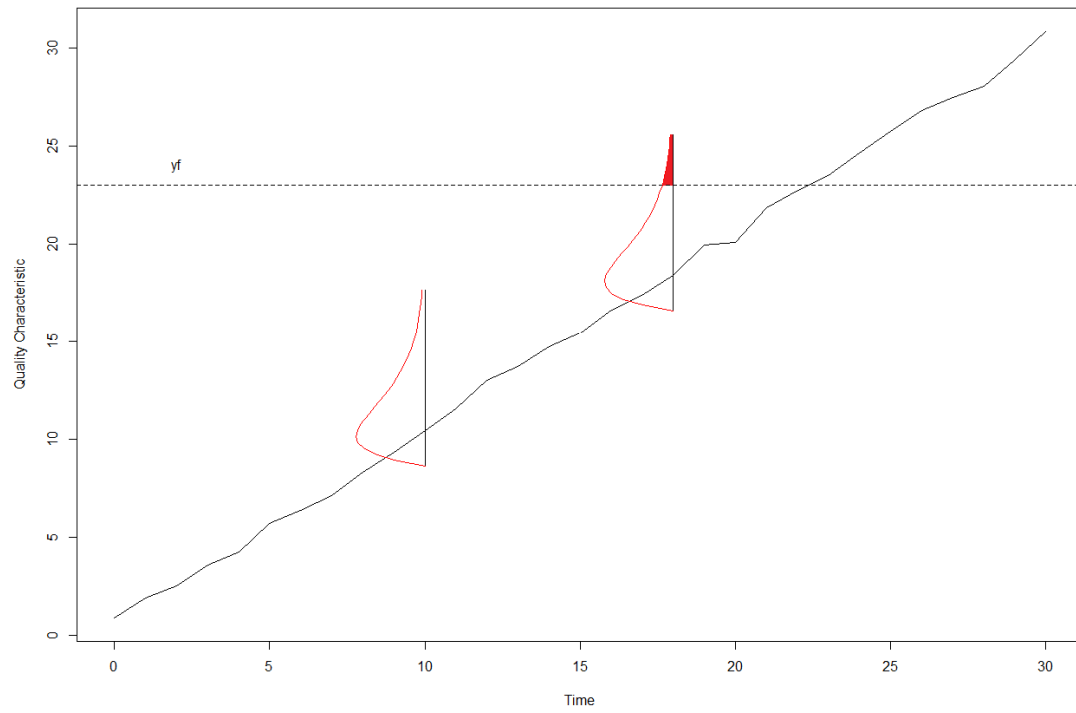
(b) 伽瑪隨機過程

Case	$\tilde{t}_{0.01}^G$	$\tilde{t}_{0.01,L}^G$	DIC
I	14.903	10.853	-193.805
II	14.884	10.849	-193.776
III	14.867	9.294	-192.000
IV	15.113	9.409	-191.818

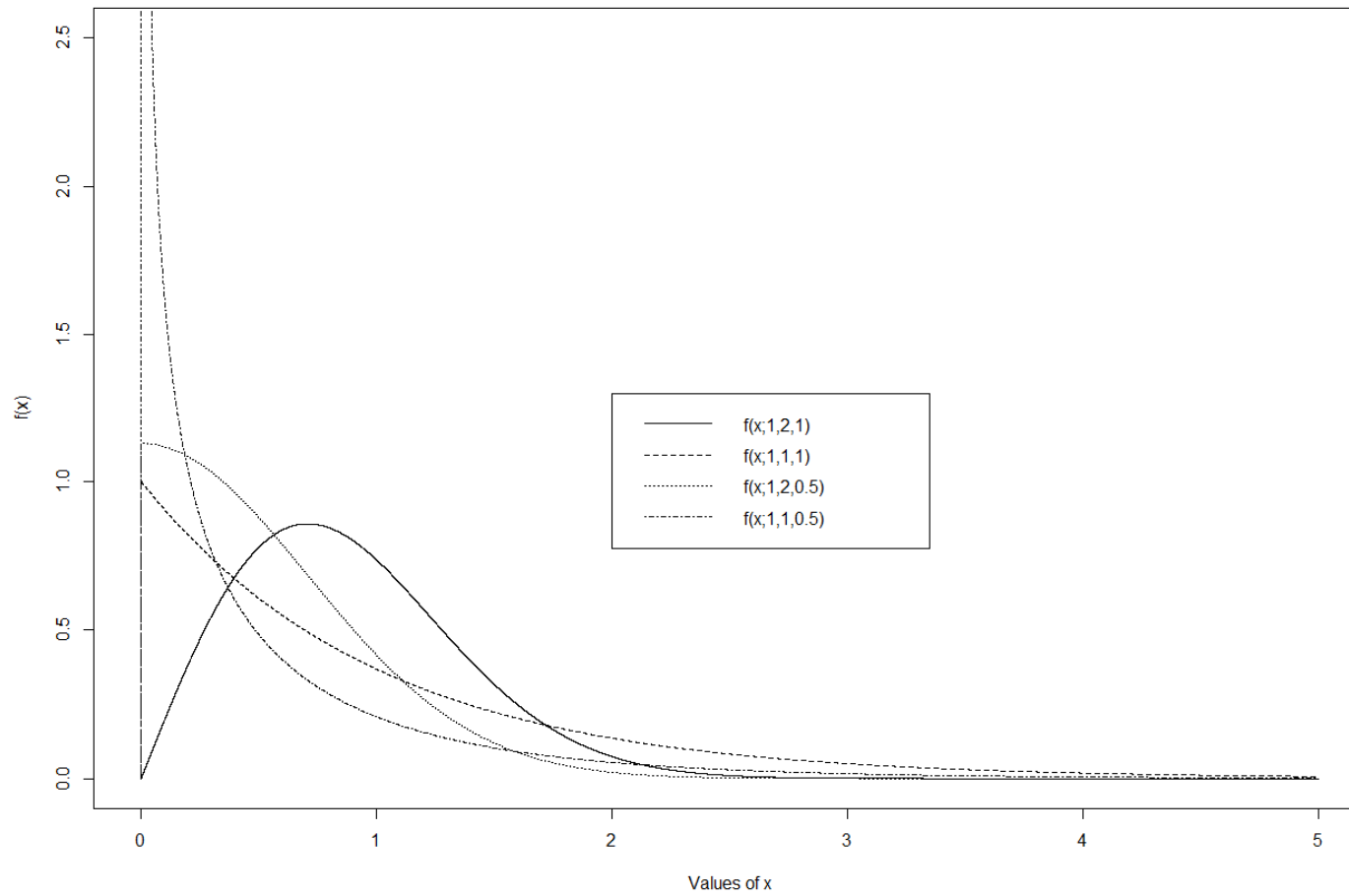
表六， t_p 最大概似估計、信賴下界($\hat{t}_{0.01,L}$)及 AIC

Process	$\hat{t}_{0.01}$	$\hat{t}_{0.01,L}$	AIC
Generalized gamma	11.943	11.490	-294.4
Gamma	14.696	14.411	-191.4

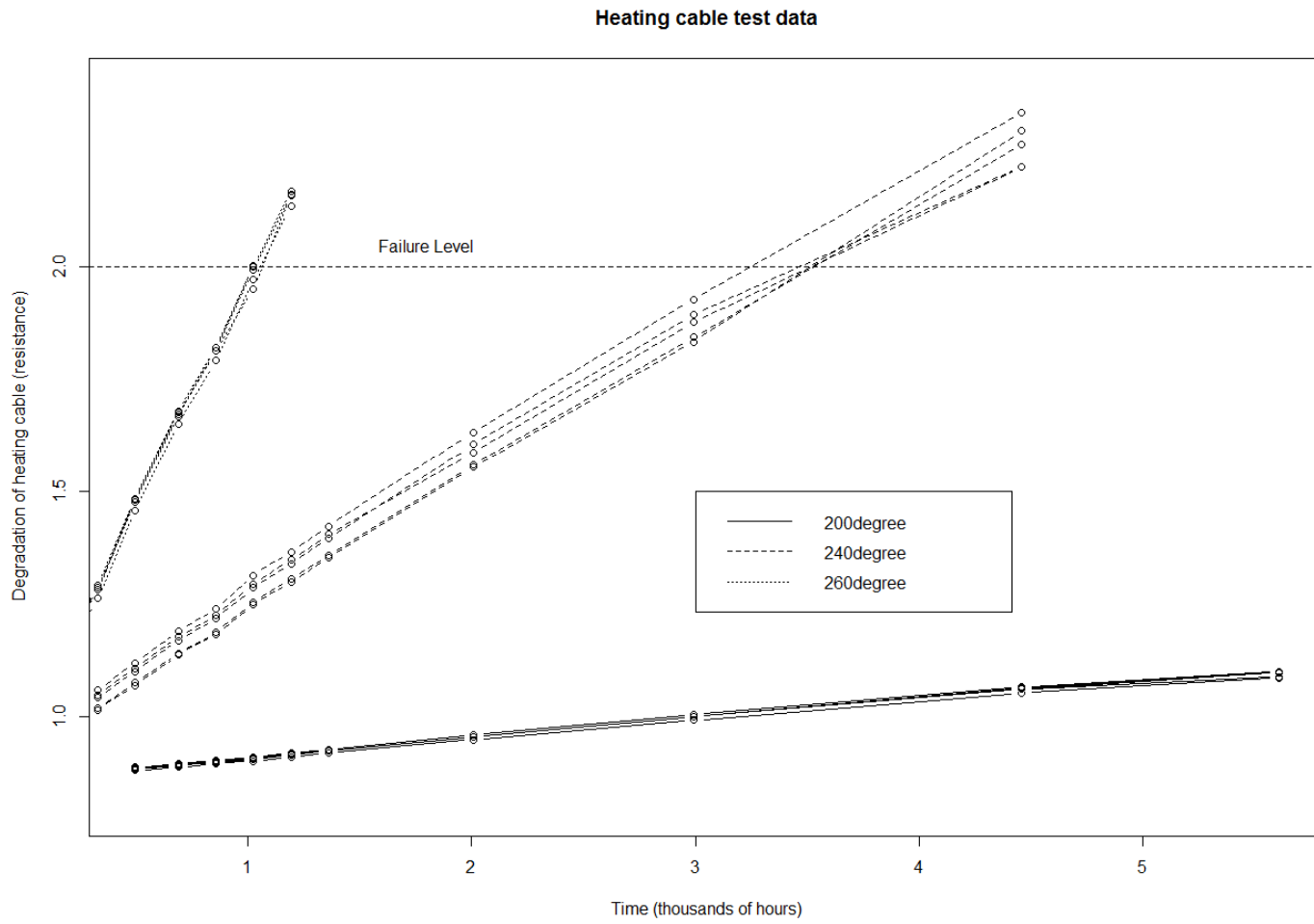
圖一，隨時間衰變的產品品質特性



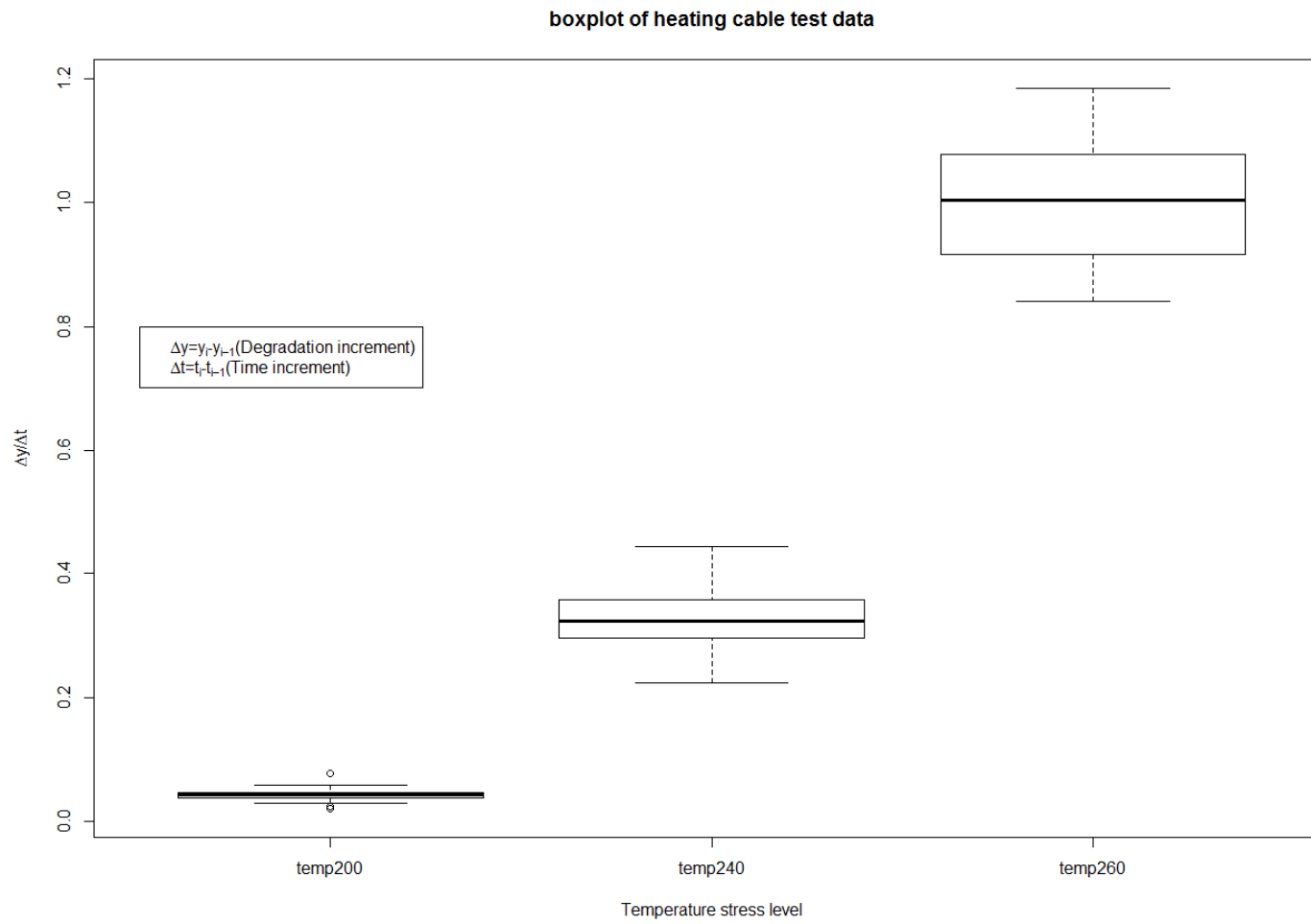
圖二，具形狀參數 λ 及 ω 的廣義伽瑪分布之機率密度函數



圖三，不同應力水準下產品品質特性隨時間衰變的過程

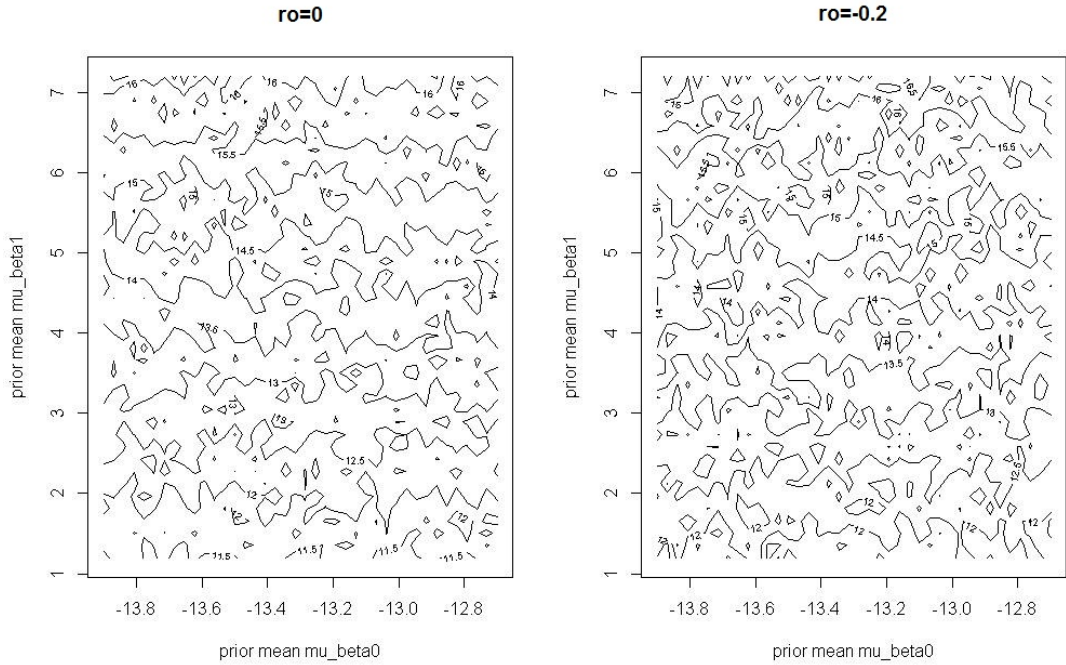


圖四，不同應力水準下產品品質特性單位時間增量之盒圖



圖五，對應不同的 β_0 及 β_1 之 t_p 貝氏估計

(a) 廣義伽瑪分布



(b) 伽瑪分布

